

数值模式预报时效对计算精度和时间步长的依赖关系

王鹏飞¹ 黄刚²

1 中国科学院大气物理研究所大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029

2 中国科学院大气物理研究所东亚区域气候-环境重点实验室, 全球变化东亚区域研究中心, 北京 100029

摘要 通过数值计算研究 Lorenz 非线性动力系统, 探讨了非线性动力系统中初值问题的解对时间步长和计算精度的依赖关系, 从新的角度研究动力系统的预报时效问题, 讨论了评价舍入误差对预报时效影响程度的方法。实验结果表明: 动力系统的预报时效不仅与初值误差有关, 而且在一定条件下敏感地依赖于计算采用的时间步长和计算精度。

关键词 误差 非线性 动力系统 计算精度 预报

文章编号 1006-9585 (2006) 03-0395-09 **中图分类号** P435 **文献标识码** A

A Study on the Dependency of Maximum Prediction Time on Computation Precision and Time Step-size in Numerical Model

WANG Peng-Fei¹ and HUANG Gang²

1 *State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029*

2 *Key Laboratory of Regional Climate-Environment for Temperate East Asia, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences; START Regional Center for Temperate East Asia, Beijing 100029*

Abstract Some dependencies on machine precision and step-size in float calculation of nonlinear dynamical system initial value question with errors are studied by using of multiple precision method for the Lorenz nonlinear equations. When using certain float point precision in computation the intrinsic maximum effective computation time can be used to study the maximum prediction time in atmospheric science. A method based on multiple precision computing to evaluate and extend the nonlinear dynamic system's maximum prediction time is presented. From the result we found that the predictability time is not only depend on initial error but also sensitive to the precision and the time step-size used in the computation.

Key words error, nonlinear, dynamics system, precision, prediction

1 引言

数值天气预报的质量随预报时间的发展而迅

速降低, 原因很多^[1]。国际上许多学者对该问题进行了研究, 最早可追溯到 Thompson^[2]在 1957 年对可预报性进行的工作, Lorenz^[3]在 1965 年系

收稿日期 2006-03-16 收到, 2006-04-10 收到修定稿

资助项目 中国科学院知识创新工程重要方向项目 KZCX3-SW-218 和国家重点基础研究发展规划项目 2006CB400500 以及国家自然科学基金委青年项目 40305012

作者简介 王鹏飞, 男, 1973 年出生, 硕士, 主要从事数值模式并行计算、非线性可预报性、数值分析和大气科学数据信息系统等方面的研究。Email: wpf@mail.iap.ac.cn

系统地研究了预报系统中初值差异随时间的增长问题, 平均看来, 风和温度的微小误差每 4 天增加 1 倍。1969 年 Lorenz^[4] 利用观测资料, 提出了量化不同时刻大气相似程度的方法。其后还有许多人进行了更细致的实验, 得到的结果都表明天气尺度的预报可能性不超过 2~3 周。在国内也有很多研究人员对可预报性问题进行了研究, Chou^[5] 对大气可预报性和预报技巧做过研究, Mu 等^[6] 根据实际需要提出了 3 类可预报性问题。

一般来说, 数值天气预报系统可以归结为使用一套非线性微分方程来利用初值进行预报, 因此对非线性动力系统初值问题的研究结果, 可以用来探讨实际天气预报系统的一些规律。按照微分方程的理论, 符合某些要求的非线性动力系统的解存在且唯一。数值计算是研究非线性动力系统的一种常用方法, 但是由于计算机浮点计算时舍入误差的存在, 使计算结果同时受到算法离散误差和舍入误差的影响。Li 等^[7] 和 Wang 等^① 进行的数值实验表明: 在单精度和双精度计算条件下, 舍入误差对非线性系统的计算有着重要的影响。穆穆等^[8] 指出模式的可预报性研究必须考虑机器精度的影响。

常用的浮点计算机都提供符合 IEEE-754^② 标准的单精度和双精度运算, 一些计算机系统能够支持 4 倍精度计算。为了获得更高的浮点计算精度, 需要额外的办法, 在计算机领域有专门的库程序来实现多精度计算, 常用的有: GMP (GNU multiple-precision library)^③, MPFR (The Multiple Precision Floating-Point Reliable Library)^④ 等, 另外 maple^⑤ 等应用软件也可以支持任意精度的数值运算。本文的部分实验使用了 MPFR/GMP 工具。

在 Lorenz 研究可预报性问题时, 把数值模式的预报场看作初始误差, 以统计的方法做预报, 得到的误差倍增时间为 4 天左右。后来又用 1963~1967 年的实际观测资料来做计算, 通过计算 1~8 天后场的平均相似程度, 对误差增长率进行估计, 得到的误差倍增时间为 2.5~8 天。这些实验给出了预报时效的大概时间范围, 由于计算条件的限制, 在上述工作中, 计算精度不可能很高, 计算时使用的积分步长也可能不是最优, 而这两点恰好对非线性动力系统的计算有至关重要的

影响。

本文做如下研究: 以 Lorenz 非线性动力系统代替实际的天气预报系统进行研究。不以观测资料为参考场, 而是以多精度计算产生的更高精度结果为参考场来评价初值误差在单精度和双精度计算时的增长情况, 找出数值模式预报时效对计算精度和时间步长的依赖关系。

2 数值模式实验

2.1 Lorenz 系统

对 Lorenz 方程^[9]

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -\alpha x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} = \gamma x - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} = xy - \beta z, \end{cases} \quad (1)$$

其中 σ 、 γ 、 β 为无量纲化后常数, t 为无量纲时间。考虑其混沌状态, 选取参数 $\gamma = 28.0$ 为混沌情形^[10], $\sigma = 10.0$, $\beta = 8/3$ 。

方程 (1) 为非线性方程, 一般没有解析解, 只能用数值方法求近似解, 为了讨论其多精度解的计算方法, 以 4 阶龙格-库塔方法^[11] 为例进行计算实验。

2.2 误差倍增时间对计算精度和时间步长的依赖性

在采用 Lorenz 非线性动力系统进行研究时, 为了定义误差倍增时间, 定义方程解的差别程度 $D_2(t)$ 为:

$$D_2(t) = \sqrt{\sum_{x,y,z} [V_t(D_0, p_1) - V_{t_0}(0, p_2)]^2}, \quad (2)$$

其中, V 为变量, V_t 为初值误差不为 0 的初值在 t 时刻的计算值, V_{t_0} 为初值误差为 0 的初值在 t 时刻的参考计算值 (也称为参考解), 这个参考计算

① Wang Pengfei, Huang Gang, Wang Zaizhi. Analysis and Application of Multiple Precision Computation and Round-off Error for Nonlinear Dynamic Systems, submitted to Advances in Atmospheric Sciences

② <http://babbage.cs.qc.edu/courses/cs341/IEEE-754references.html>

③ <http://www.swox.com/gmp/>

④ <http://www.mpr.org/>

⑤ <http://www.maplesoft.com/>

值近似等于方程的真解， p_1 、 p_2 为计算精度，且 $p_2 > p_1$ 。由于方程的真解无法得到，以下的讨论中以 V_{i0} 代替真解进行计算（后面的计算中，以 4 倍精度计算得出 V_{i0} ）。初值时刻的差别程度简记为 D_0 ，当 $D_0 \neq 0$ 时，定义计算误差相对初始误差的比值为 D_r ，

$$D_r = \frac{D_2(t)}{D_0}, \quad (3)$$

本文将误差倍增时间（double error time, 简记 T_{de} ）定义为使 $D_2(t)$ 达到 2 倍 D_0 的时刻，即第 1 次满足 $D_r=2$ 的 t 时刻。

图 1 为初值选为 (5, 5, 10) 和 $D_0=0.1 \sim 0.00001$ 范围内变化时误差倍增时间的变化情况。从图 1 可以看出，双精度计算， D_0 在选定的范围内变化时，计算误差倍增时间随初值误差的改变变化很小。而单精度计算时， D_0 在 0.1~0.001 范围内变化时，计算误差倍增时间随初值误差的改变变化很小，当 D_0 进一步减小时，误差倍增时间变化不规则，这是由于舍入误差和 Lorenz 系统的非线性影响共同作用造成的。

图 2 为初值选为 (5, 5, 10) 和 $D_0=1.0, 0.1, 0.01$ 三种情况下，计算误差与初值误差的比值 D_r 随时间的变化情况。从图 2 可以看出，在计算初期 ($t=0.0 \sim 3.0$) D_r 随时间变化的趋势比

较一致 (图 2a~c)，而在计算时间达到一定范围后 ($t > 5.0$) D_r 随时间变化的趋势相差较大 (图 2d~f)。可以看出 D_r 与时间的关系并不是线性关系，这说明不能以 D_r 倍增时间来推测预报时效。从图 2g~i 可以看出当 $t > 3.0$ 以后，差值变大较明显。

图 3 为初值选为 (5, 5, 10) 和 $D_0=1.0$ 时，误差倍增时间的计算结果。从图 3 可以看出计算误差倍增时间随步长 h 的变化情况，当 h 从 0.1 减小到 0.00001 时，倍增时间振荡增加，倍增时间与步长有关，当步长减小到一定程度之后，倍增时间趋向固定的值。

上述研究表明，误差倍增时间并不是简单的线性趋势，完全由倍增时间来估计预报时效并不合适。

2.3 相对误差对计算精度和时间步长的依赖性

为了讨论预报时效，定义下面的“误差限时间” (limit error time, 简记 T_e)，首先定义方程解的模为

$$A_t = \sqrt{\sum_{x,y,z} [V_{i0}(0, p_2)]^2}, \quad (4)$$

其中 V_{i0} 的含义与 (2) 式相同。

解的相对误差 L_2 为

$$L_2 = D_2(t)/A_t, \quad (5)$$

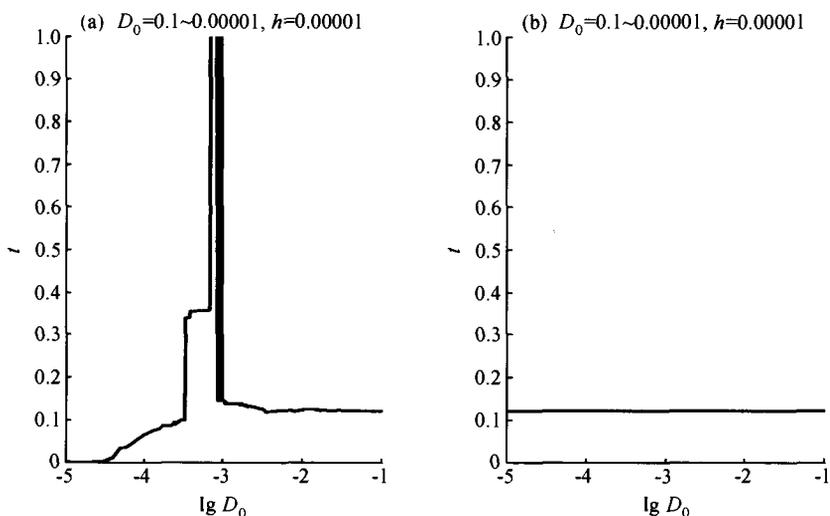


图 1 计算值误差倍增时间 (T_{de}) 随初值误差的变化：(a) 单精度结果；(b) 双精度结果。初值为 (5, 5, 10)， $\gamma=28.0$
 Fig. 1 Double error time (T_{de}) corresponds to initial error, single precision (a) and double precision (b), while initial value is (5, 5, 10) and $\gamma=28.0$

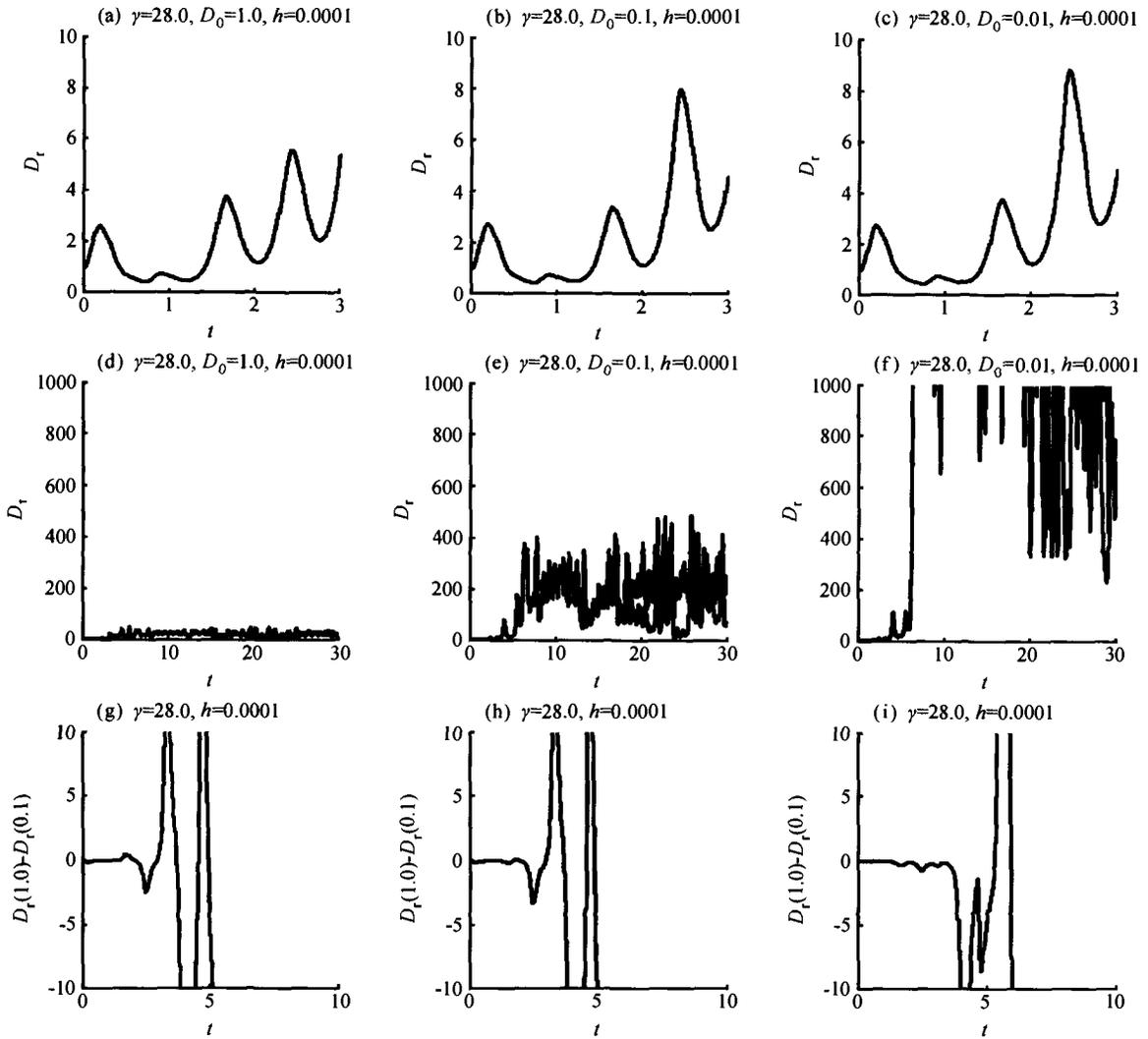


图2 计算误差与初始误差的比值 D_r 随时间的变化; (a~c) t 在 0 到 3.0 范围内 D_r 的变化; (d~f) t 在 0 到 30.0 范围内 D_r 的变化; (g~i) 为使用 $D_{r(D_0=1.0)} - D_{r(D_0=0.1)}$, $D_{r(D_0=1.0)} - D_{r(D_0=0.01)}$ 和 $D_{r(D_0=0.1)} - D_{r(D_0=0.01)}$ 得到的差。初值为 (5, 5, 10), $\gamma=28.0$
Fig. 2 The computation error against initial error (D_r) corresponds to time. Initial value is (5, 5, 10) and $\gamma=28.0$, (a~c) is the result when $0 < t < 3.0$, (d~f) is the result when $0 < t < 30.0$ and (g~i) is the difference when use $D_{r(D_0=1.0)} - D_{r(D_0=0.1)}$, $D_{r(D_0=1.0)} - D_{r(D_0=0.01)}$ and $D_{r(D_0=0.1)} - D_{r(D_0=0.01)}$

本文将误差限时间定义为：保证初值问题数值解与参考解的差异程度 D_2 与解的模 A_i 的相对误差在某个范围内（例如： $L_2 \leq 1/10$ ）的最大计算时间，误差限时间与算法和步长有关。最大误差限时间为所有步长的误差限时间中的最大值。

图 4 的初值选为 (5, 5, 10)，其中图 4a、b 为 $D_0=0.1$ 的结果，图 4c、d 为 $D_0=0.001$ 的结果。从图 4 可以看出计算值误差限时间随步长 h 的变化情况，当 h 从 0.1 减小到 0.00001 的过程中，误差限时间增大较明显。对比图 4a、b 和图

4c、d 可见初值误差减小时，误差限时间增大明显。对比图 4c、d 可见，当初值误差在一定范围内，单精度和双精度计算时的误差限时间比较一致。

当初值误差进一步减小时（图 4e、f），双精度计算的误差限时间比单精度计算的数值要大，而且单精度计算的误差限计算开始出现紊乱。

图 5 为初值选为 (5, 5, 10) 和 $D_0=0.1$ 时， L_2 随时间的变化情况。从图 5 可以看出，单精度和双精度的计算结果（图 5a~f）在计算初期 L_2

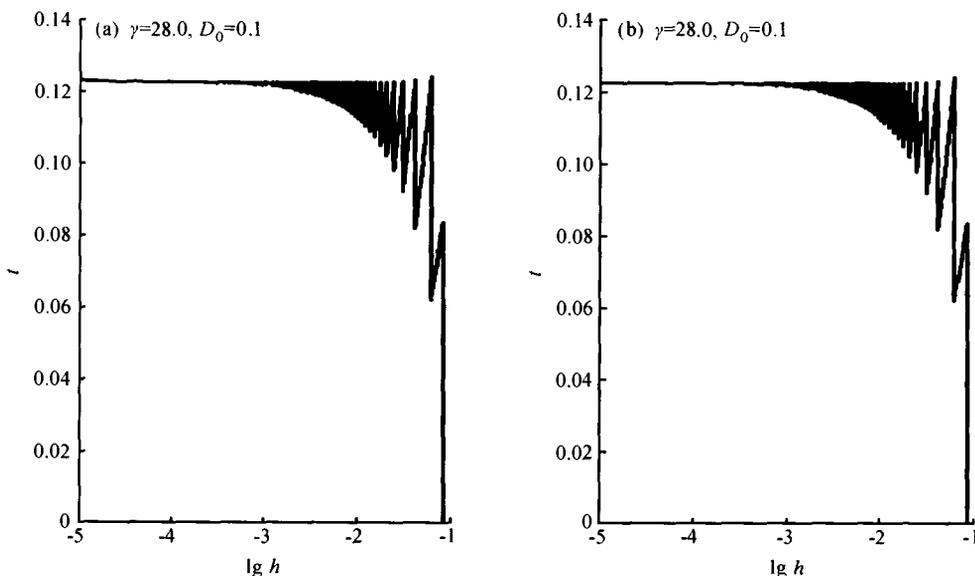


图 3 计算值误差倍增时间随步长的变化: (a) 为单精度结果; (b) 为双精度结果。初值为 (5, 5, 10), $\gamma=28.0$, $D_0=0.1$

Fig. 3 Double error time (T_{de}) corresponds to time step-size, single precision (a) and double precision (b) while initial value is (5, 5, 10), $\gamma=28.0$ and the initial error $D_0=0.1$

随时间变化的趋势比较一致, 而在计算时间达到一定范围后 L_2 随时间变化的趋势相差较大。而且可以看出 L_2 随时间的变化与使用的计算步长有关系, 当步长从 0.01 减小到 0.0001 时, 即使同样的计算精度, 在计算时间达到一定范围后, L_2 随时间变化的趋势也相差较大。

图 6 初值和参数选择同前, 可以看出计算值误差限时间随初值差异的变化情况。当初值误差 D_0 从 0.1 减小到 0.0001 的过程中, 误差限时间增大较明显。对比单精度和双精度的结果可以看出, 单精度的误差限时间最大在 6.2 左右, 而双精度的最大值要大得多 (计算表明其最大值在 33.2 左右)。

对于系统是非混沌的情况, 我们也进行了数值实验 (参数 $\gamma=22.0$), 结果如下:

(1) 对于坏的初值^{[7]①} (某种初值, 如果计算终值依赖于计算过程中使用的计算步长和计算精度, 我们称这样的初值为“坏的初值”, 反之则称为“好的初值”), 误差的变化趋势初期与上面相似, 一段时间后开始摆动, 最后趋向固定的差值, 根据收敛到吸引子的不同, 最终差值不确定。

图 7 的初值等参数同图 4, 但 γ 选 22.0 为非混沌情况。从图 7 可以看出当 h 从 0.1 减小到 0.00001 的过程中, 误差限时间增大较明显, 且

初值误差减小时, 误差限时间增大明显。

对比图 4 和图 7 可以看出, 对于坏的初值, 其误差限时间变化与混沌情形相似。

(2) 对于好的初值, 误差的变化趋势是先摆动, 随后趋向固定的差值 (图略)。

通过本节的实验可以看出: 当使用误差限时间来评价预报时效问题时, 计算精度和时间步长对误差限时间有重要的影响。初值的准确程度对误差限时间的影响最重要, 改进初值精度是提高预报误差限的有效方法。在初值误差小到一定程度时, 使用高的计算精度和小的积分步长可以提高预报期限, 使用双精度可能获得比单精度更好的预报效果。在初值精度确定而且计算精度确定的时候, 预报期限取决于计算步长, 对于本文所用的动力系统, 可以采用最优搜索方法得到最佳的计算步长。

3 结果分析

在研究大气运动时, 有两类可预报性问题,

① Wang Pengfei, Huang Gang, Wang Zaizhi. Analysis and Application of Multiple Precision Computation and Round-off Error for Nonlinear Dynamic Systems, submitted to Advances in Atmospheric Sciences

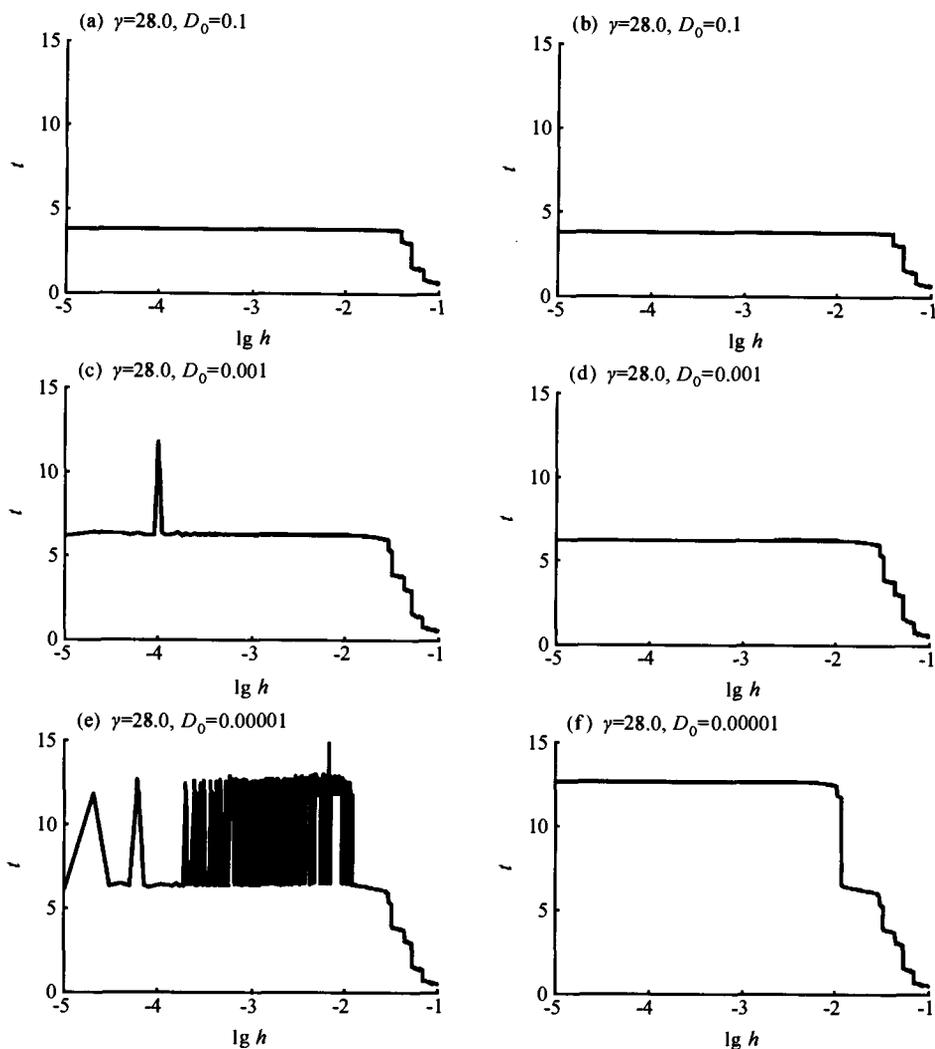


图 4 计算值误差限时间随步长的变化：(a)、(c)、(e) 单精度结果；(b)、(d)、(f) 双精度结果。初值为 (5, 5, 10), $\gamma=28.0$, (a) 和 (b) 中 $D_0=0.1$, (c) 和 (d) 中 $D_0=0.001$, (e) 和 (f) 中 $D_0=0.00001$

Fig. 4 The relative error's limit error time (T_{le}) corresponds to time step-size, single precision (a), (c), (e) and double precision (b), (d), (f). Initial value is (5, 5, 10) and $\gamma=28.0$. $D_0=0.1$ in (a) and (b); $D_0=0.001$ in (c) and (d); $D_0=0.00001$ in (e) and (f)

本文将它们统称为理论可预报性问题。它们分别是：初始场的不确定性对预报的影响以及模式误差对预报的影响。

在使用计算机对具体的数值模式进行计算时，数值模拟的结果正确程度可以称为实际计算时的可预报问题。容易看出，实际计算时的可预报问题与理论可预报性、计算时的离散化误差和舍入误差都有关系。由于实际使用的数值模式都是运用浮点计算机进行计算的，因此对实际计算时预报期限的研究具有重要的意义。

对于初值误差越小，预报时效越长的非线性

系统来说，有

$$T_{le}(e, p_1) \leq T_{le}(0, p_1) \equiv T_{mect}(p_1),$$

其中 e 表示初值误差， p_1 表示计算精度， T_{le} 为误差限时间， T_{mect} 为使用相同误差限判据时的最大有效计算时间，相当于 Li 等^[7] 定义的 MECT。

对于确定的系统和计算精度 p_1 ， $T_{mect}(p_1)$ 是一定的，因此无论怎样改变计算方法和技巧， $T_{le}(e, p_1) \leq T_{mect}(p_1)$ 总成立。所以只有增大计算精度，也就是使 $T_{mect}(p_2) > T_{mect}(p_1)$ 时， $T_{le}(e, p_2) \leq T_{mect}(p_2)$ ，此时才有可能使 $T_{le}(e, p_2) > T_{mect}(p_1)$ 成立，即超过低阶精度的最大预报期限。

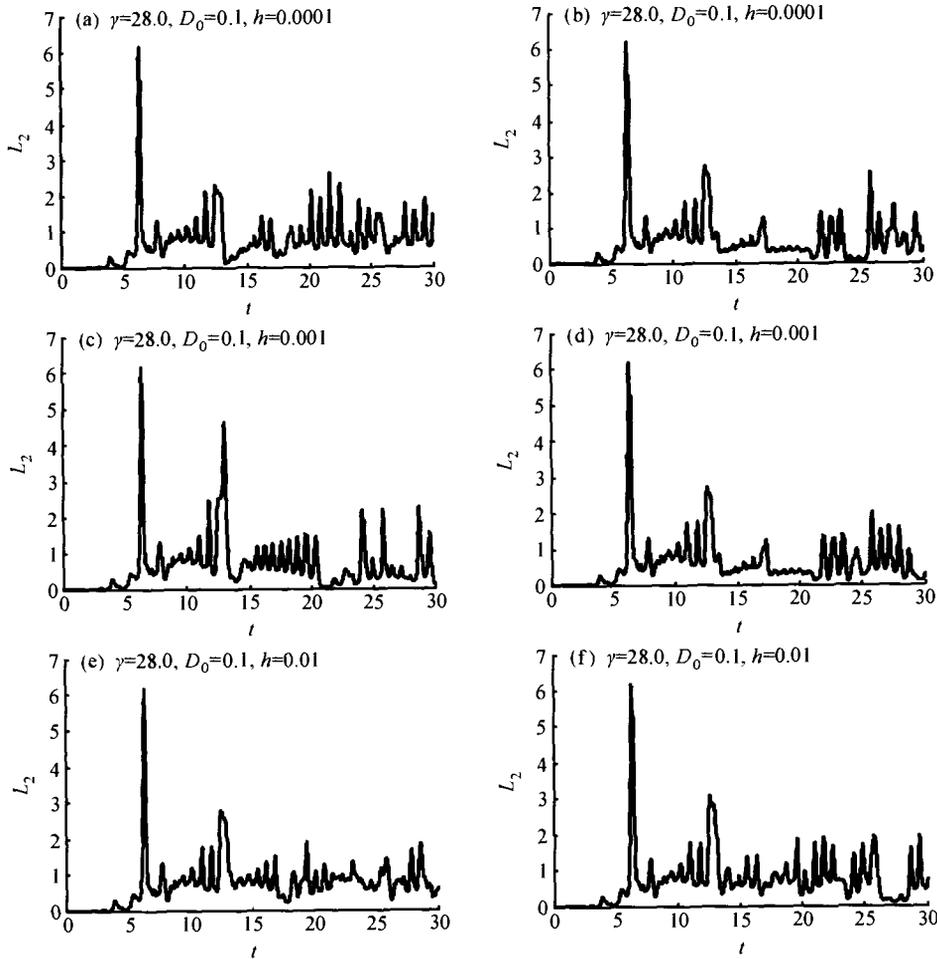


图5 L_2 随时间的变化：(a)、(c)、(e) 单精度结果，(b)、(d)、(f) 双精度结果。初值为 (5, 5, 10)， $\gamma=28.0$ ，(a) 和 (b) 中 $h=0.0001$ ，(c) 和 (d) 中 $h=0.001$ ，(e) 和 (f) 中 $h=0.01$

Fig. 5 The relative error (L_2) corresponds to time, single precision (a), (c), (e) and double precision (b), (d), (f). Initial value is (5, 5, 10) and $\gamma=28.0$. $h=0.0001$ in (a) and (b); $h=0.001$ in (c) and (d); $h=0.01$ in (e) and (f)

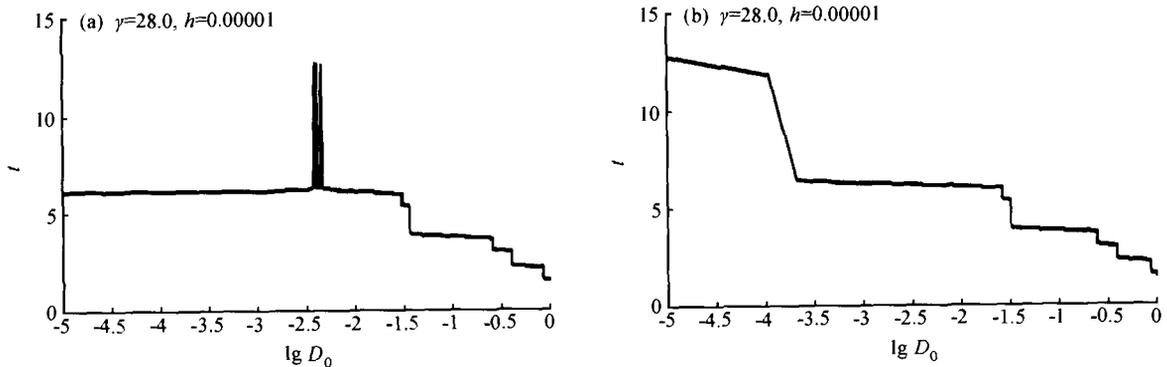


图6 计算值误差限时间随初值误差的变化：(a) 单精度结果；(b) 双精度结果。初值为 (5, 5, 10)， $\gamma=28.0$

Fig. 6 The relative error's limit error time (T_{le}) corresponds to initial error, single precision (a) and double precision (b). Initial value is (5, 5, 10) and $\gamma=28.0$

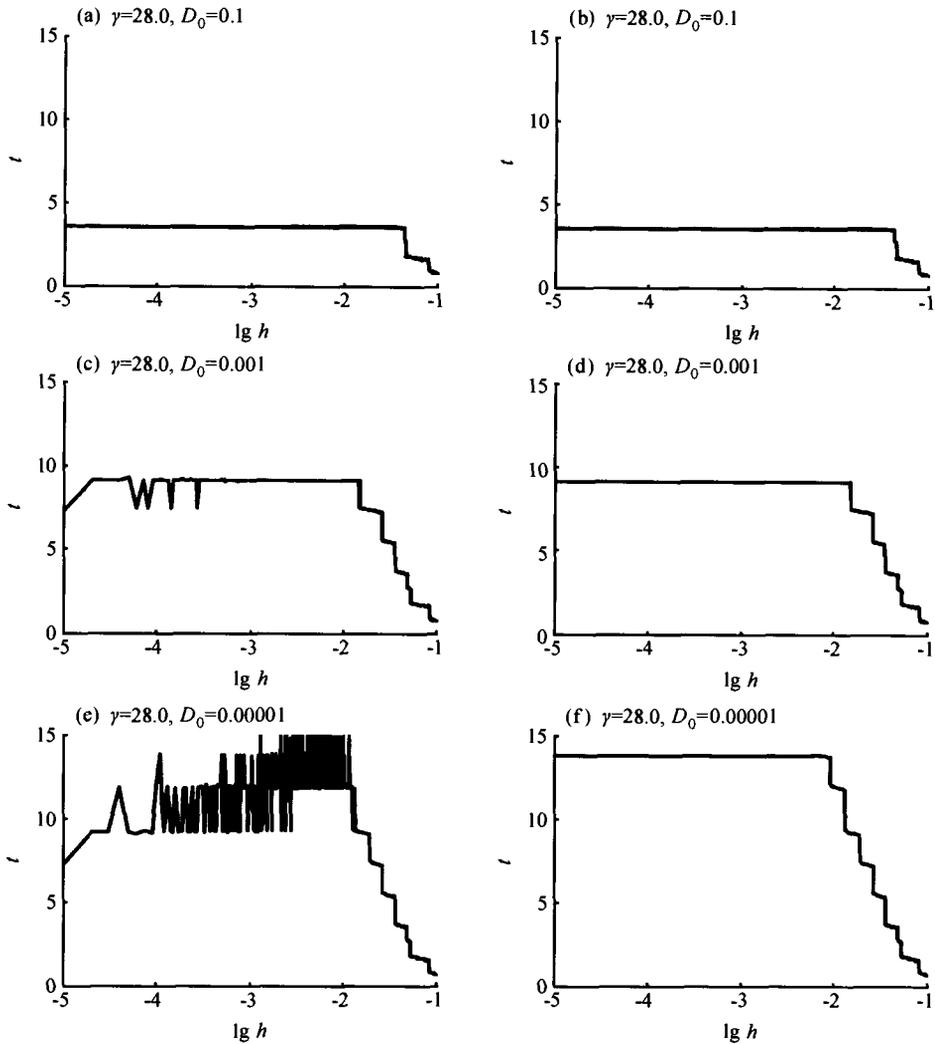


图7 计算值误差限时间随步长的变化：(a)、(c)、(e) 单精度结果；(b)、(d)、(f) 双精度结果。初值为 (5, 5, 10), $\gamma=22.0$, (a) 和 (b) 中 $D_0=0.1$, (c) 和 (d) 中 $D_0=0.001$, (e) 和 (f) 中 $D_0=0.0001$

Fig. 7 The relative error's limit error time (T_ϵ) corresponds to time step-size, single precision (a), (c), (e) and double precision (b), (d), (f). Initial value is (5, 5, 10) and $\gamma=22.0$. $D_0=0.1$ in (a) and (b); $D_0=0.001$ in (c) and (d); $D_0=0.0001$ in (e) and (f)

这些分析表明：高的浮点计算精度和优化的计算步长，是将复杂非线性动力系统预报时效扩展到更长时间的一种必要条件。

以 Lorenz 数值模式的计算为例：如果只需要得到较短时间（如 $t < 3.0$ ）的时刻计算值，那么仅考虑初值误差的影响就可以了，而如果需要得到更长时间（如 $t > 8.0$ ）时刻计算值，就必须考虑计算步长和计算精度的影响。也就是说如果 Lorenz 系统的预报期限从较短时间提高到较长时间或更高时，仅增加初值精度还是不够的，还需要与之配合的优化步长和足够高的浮点精度。

当仅知道含有误差的初值，而不知道准确的初值时，可以定义如下的解差别程度 $D_3(t)$ 为

$$D_3(t) = \sqrt{\sum_{x,y,z} [V_t(D_0, p_1) - V_{t_0}(D_0, p_2)]^2}, \quad (6)$$

其中， V 为变量， V_t 是初值误差为 D_0 的初值在 t 时刻的计算值， V_{t_0} 是初值误差为 D_0 的初值在 t 时刻的参考计算值， p_1 、 p_2 为计算精度，且 $p_2 > p_1$ 。

定义解的模 $A_2(t)$ 为

$$A_2(t) = \sqrt{\sum_{x,y,z} [V_{t_0}(D_0, p_2)]^2}, \quad (7)$$

由 (6) 式和 (7) 式来定义解的相对误差 L_3 为

$$L_3 = D_3/A_2. \quad (8)$$

通过引入相对误差 L_3 的计算, 可以评价模拟结果受舍入误差影响的程度, 能够比较容易地得出实际计算时预报期限的范围。此方法可操作性较强, 而且适用范围较广。可以避免理论预报期限在应用上的一些困难, 而且其得到的结论可以和理论预报期限相互印证。

4 结论和讨论

本文对 Lorenz 动力系统的计算实验表明: 非线性动力系统的误差限时间是受系统本身特点和舍入误差的共同影响。混沌情况时误差限时间一定存在, 而非混沌情况时, 也有可能产生误差限时间的上限。误差限的产生取决于动力系统中误差的变化方式, 与方程的各项系数及初值关系密切。

初值差异导致的计算误差发展主要由 3 个因素决定: 1) 方程本身的特点与初值; 2) 算法的离散误差; 3) 浮点计算的舍入误差。

实验结果显示: 一个不好的计算步长可能降低数值模式的预报期限。在实际应用中, 为了加快预报系统的计算速度, 在保证计算稳定的前提下, 数值模式会采用尽量大的时间步长。通过本文上面的分析可以看出这种步长并不一定是保证得到最长预报期限的步长, 也就是说, 有可能通过进一步调整计算步长来扩展预报期限。

本文讨论的问题是在观测初值很精确而且数学模型很精确时应注意的问题。随着观测技术的进步, 数值模式的初值误差逐渐减小, 舍入误差对数值模拟结果的影响将变得越来越重要。

采用最优步长搜索和多精度计算的办法来扩展动力系统预报期限的方法是以计算速度降低为代价的。在复杂的真正预报系统中, 如何选择合适的预报步长是值得研究的问题。

本文提到的用参考解评价误差增长和利用多精度计算拓展预报期限的方法, 有可能应用到更为复杂的数值模式中, 比如实际的数值天气预报

模式中, 具体的实现办法和效果将是需要进一步研究的问题。

参考文献 (References)

- [1] 丑纪范, 郃吉东. 长期数值天气预报. 北京: 气象出版社, 1995
Chou Jifan, Gao Jidong. *Long-term Numerical Weather Prediction* (in Chinese). Beijing: China Meteorological Press, 1995
- [2] Thompson P D. Uncertainty of initial state as a factor in the predictability of large scale atmospheric flow patterns. *Tellus*, 1957, **9**: 279~295
- [3] Lorenz E N. A study of the predictability of a 28 - variable atmospheric model. *Tellus*, 1965, **17**: 321~333
- [4] Lorenz E N. Atmospheric predictability as revealed by naturally occurring analogues. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1969, **26**: 636
- [5] Chou Jifan. Predictability of the atmosphere. *Advances in Atmospheric Sciences*, 1989, **6** (3): 335~346
- [6] Mu Mu, Duan Wansuo, Wang Jiacheng. The predictability problems in numerical weather and climate prediction. *Advances in Atmospheric Sciences*, 2002, **19** (2): 191~204
- [7] Li Jianping, Zeng Qingcun, Chou Jifan. Computational uncertainty principle in nonlinear ordinary differential equations—I. Numerical results. *Science in China* (Ser. E), 2000, **43** (5): 449~461
- [8] 穆穆, 李建平, 丑纪范, 等. 气候系统可预报性理论研究. 气候与环境研究, 2002, **7** (2): 227~235
Mu Mu, Li Jianping, Chou Jifan, et al. Theoretical research on the predictability of climate system. *Climatic and Environmental Research* (in Chinese), 2002, **7** (2): 227~235
- [9] Lorenz E N. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 1963, **20** (130): 130~141
- [10] 丑纪范. 大气科学中的非线性和复杂性. 北京: 气象出版社, 2002
Chou Jifan. *Nonlinear and Complexity in Atmospheric Science* (in Chinese). Beijing: China Meteorological Press, 2002
- [11] 肖彼南, 赵来军, 党林立. 现代数值计算方法. 北京: 北京大学出版社, 2003
Xiao Xiaonan, Zhao Laijun, Dang Linli. *Modern Numerical Recipes* (in Chinese). Beijing: Peking University Press, 2003